Listy Biometryczne - Biometrical Letters
Vol. 28 (1991), No. 2, 123–130

O odporności mocy testu hipotezy o prawdopodobieństwie w schemacie Bernoulliego

Wojciech Zieliński

Katedra Statystyki Matematycznej i Doświadczalnictwa, SGGW
Rakowiecka 26/30, 02—568 Warszawa

Streszczenie

W wielu zagadnieniach praktycznych badane zjawiska modelowane są schematem Bernoulliego z nieznanym prawdopodobieństwem sukcesu p. Okazuje się jednak, że liczne niekontrolowane czynniki wpływają na to, że prawdopodobieństwo sukcesu zmienia się od doświadczenia do doświadczenia. W pracy omawiany jest wpływ tych zmian na moc standardowego testu hipotezy $H: p \leq p_0$.

1. WSTĘP

W zagadnieniach badania skuteczności lekarstw, skuteczności środków owadobójczych itp. jako model matematyczny stosuje się model dwumianowy, tzn. schemat Bernoulliego. Konkretne przykłady takich problemów można znaleźć np. w książce Elandt (1964). Podstawowym założeniem w tym modelu jest to, że prawdopodobieństwo sukcesu w pojedynczej próbie wynosi p i jest ono stałe. Jednak z praktyki wiadomo, że to prawdopodobieństwo zmienia się od próby do próby. Może to być spowodowane różnicami między organizmami, niedokładnością odmierzania dawek lub też jeszcze innymi tego typu błędami. Pytanie jakie powstaje brzmi: jak takie niedokładności wpływają na jakość naszego wnioskowania. Rozważamy zagadnienie testowania hipotezy $H: p \leq p_0$ (p_0 dane) i wpływ zmieniającego się prawdopodobieństwa sukcesu na moc standardowego testu tej hipotezy. O prawdopodobieństwach sukcesu w kolejnych doświadczeniach zakładamy, że niewiele odbiegają one od p oraz, że w ciągu n doświadczeń średnia wartość tych prawdopodobieństw wynosi dokładnie p. Szczegółowo pokazany jest sposób wyznaczania funkcji odporności mocy testu niezrandomizowanego oraz podano funkcję odporności dla testu zrandomizowanego. Pokrótce omówiono aspekt infinitezymalny odporności.

Słowa kluczowe: odporność, schemat Bernoulliego

2. MODEL STATYSTYCZNY

Rozważamy zagadnienie testowania hipotezy $H: p \leq p_0$ wobec alternatywy $K: p > p_0$ na podstwie n doświadczeń w schemacie Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu p. Jak wiadomo, jednostajnie najmocniejszy niezrandomizowany test ma postać: odrzucić hipotezę H, jeżeli $X \geq k$, gdzie X jest liczbą sukcesów oraz k jest odpowiednią stałą. Moc tego testu w punkcie $p \in (0,1)$ wyraża się wzorem

$$\beta(p) = \sum_{j \geq k} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}.$$

Przypuśćmy, że prawdopodobieństwo sukcesu w i–tej próbie wynosi p_i, przy czym $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n) \in U(p)$, gdzie

$$U(p) = \left\{ (p_1, \ldots, p_n) : \frac{1}{n} \sum p_i = p, \ |p_i - p| \leq \varepsilon, \ i = 1, \ldots, n \right\}.$$

W tej sytuacji moc testu w punkcie p będzie pewną liczbą z przedziału

$$\left(\inf_{U(p)} \beta(p_1, \ldots, p_n), \sup_{U(p)} \beta(p_1, \ldots, p_n) \right)$$

gdzie

$$\beta(p_1, \ldots, p_n) = \sum_{x \geq k} \prod_{j=1}^{n} w(p_j),$$

$$w(p_j) = p_j^{x_j} (1-p_j)^{(1-x_j)},$$

$$x = \sum x_j, \ x_j = 0 \text{ lub } 1, j = 1, \ldots, n.$$

Odporność mocy testu w punkcie p zdefiniujemy wzorem

$$r(p) = \sup_{U(p)} \beta(p_1, \ldots, p_n) - \inf_{U(p)} \beta(p_1, \ldots, p_n).$$

Naszym celem jest zbadanie funkcji $r(p)$, $p \in (0,1)$. Podobne, ale znacznie prostsze zagadnienie przy innym $U(p)$, a mianowicie bez warunku $\sum p_i = np$, było rozważane w pracy Zielińskiego (1978).

3. FUNKCJA $r(p)$

Znajdziemy punkty ekstremalne funkcji $\beta(p_1, \ldots, p_n)$ w zbiorze $U(p)$. Rozważamy najpierw punkty stacjonarne funkcji $\beta(p_1, \ldots, p_n)$ przy warunku $\sum p_i = np$. Metoda mnożników Lagrange'a prowadzi do układu równań (z mnożnikiem λ):

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{x_{(i)} = k-1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} w(p_j) - \lambda = 0, \quad i = 1, \ldots, n, \\ \displaystyle\sum p_i - np = 0, \end{cases}$$

gdzie $x_{(i)} = x - x_i$.

Odejmując pierwsze równanie od drugiego, trzeciego,... otrzymujemy następujący układ n równań z niewiadomymi $p_1, \dots, p_n$:

$$(*)\quad \begin{cases} (p_1 - p_2)\Big\{ \sum\limits_{x_{(1,2)}=k-2} \prod\limits_{j\neq 1,2} w(p_j) - \sum\limits_{x_{(1,2)}=k-1} \prod\limits_{j\neq 1,2} w(p_j)\Big\} = 0, \\ \cdots \\ (p_1 - p_n)\Big\{ \sum\limits_{x_{(1,n)}=k-2} \prod\limits_{j\neq 1,n} w(p_j) - \sum\limits_{x_{(1,n)}=k-1} \prod\limits_{j\neq 1,n} w(p_j)\Big\} = 0, \\ \sum p_i - np = 0, \end{cases}$$

gdzie $x_{(i,j)} = x - x_i - x_j$.

Jednym z rozwiązań układu $(*)$ jest oczywiście $p_1 = \dots = p_n = p$. Jeżeli $p_1 \neq p_i$ dla wszystkich p_i, $i = 2, \dots, n$, to dzieląc równania $(*)$ przez $(p_1 - p_i)$ otrzymujemy nowy układ równań, którego jedynym rozwiązaniem jest

$$p_1 = np - (k-1),\ p_2 = \dots = p_n = \frac{k-1}{n-1}.$$

Ponieważ interesują nas takie rozwiązania, że $p_i \in (0,1)$, więc powyższe rozwiązanie ma sens tylko wtedy, gdy $(k-1)/n < p < k/n$.

Jeżeli $p_1 = p_i$ dla pewnego $i \in \{2, \dots, n\}$, to otrzymujemy następujące rozwiązanie:

$$p_j = np - (k-1),\ p_1 = \dots = p_{j-1} = p_{j+1} = \dots = p_n = \frac{k-1}{n-1}$$

dla pewnego $j \in \{2, \dots, n\}$.

Zatem układ $(*)$ ma jedno rozwiązanie

$$\bar{\mathbf{p}} = (p, \dots, p),$$

gdy $p \leq (k-1)/n$ lub $p \geq k/n$,
lub $n+1$ rozwiązań

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{p}} &= (p, \dots, p), \\ \bar{\mathbf{p}}_1 &= \Big(np - (k-1), \frac{k-1}{n-1}, \dots, \frac{k-1}{n-1}\Big), \\ &\dots \\ \bar{\mathbf{p}}_n &= \Big(\frac{k-1}{n-1}, \dots, \frac{k-1}{n-1}, np - (k-1)\Big), \end{aligned}$$

gdy $(k-1)/n < p < k/n$.

Ze względu na symetrię zadania, w dalszym ciągu analizujemy tylko rozwiązania $\bar{\mathbf{p}}$ oraz $\bar{\mathbf{p}}_1$. Niech $\mathbf{A}(\mathbf{p}) = D^2(\beta(p_1, \dots, p_n)) = [a_{ij}(\mathbf{p})]_{i,j=1,\dots,n}$ będzie macierzą drugich pochodnych cząstkowych funkcji $\beta(p_1, \dots, p_n)$. Otrzymujemy:

$$a_{ij}(\mathbf{p}) = \begin{cases} 0, & \text{dla } i = j, \\ \sum\limits_{x_{(i,j)}=k-2} \prod\limits_{m\neq i,j} w(p_m) - \sum\limits_{x_{(i,j)}=k-1} \prod\limits_{m\neq i,j} w(p_m), & \text{dla } i \neq j \end{cases}$$

Dla rozwiązania $\bar{\mathbf{p}}$ otrzymujemy

$$a_{ij}(\bar{\mathbf{p}}) = \begin{cases} 0, & \text{dla } i = j, \\ c, & \text{dla } i \neq j, \end{cases}$$

gdzie

$$c = \binom{n-2}{k-2} p^{k-2}(1-p)^{n-k-1}\left(1 - \frac{n-1}{k-1}p\right).$$

Minor główny stopnia m macierzy $\mathbf{A}(\bar{\mathbf{p}})$ jest równy $(m-1)(-1)^{m-1}c^m$ (Rao, 1982, str. 86). W szczególności, wyznacznik tej macierzy jest równy $(n-1)(-1)^{n-1}c^n$.

Dla $p < (k-1)/(n-1)$ liczba c jest dodatnia. Wówczas kolejne minory główne macierzy $\mathbf{A}(\bar{\mathbf{p}})$ są przeciwnych znaków, a więc punkt $\bar{\mathbf{p}}$ jest punktem lokalnego maksimum funkcji $\beta(p_1, \ldots, p_n)$:

(a)
$$\sup_{U(p)} \beta(p_1, \ldots, p_n) = \beta(\bar{\mathbf{p}}).$$

Dla $p = (k-1)/(n-1)$ mamy $c = 0$, a więc macierz $\mathbf{A}(\bar{\mathbf{p}})$ jest macierzą zerową.

Dla $p > (k-1)/(n-1)$ liczba c jest ujemna. Wówczas wszystkie minory główne macierzy $\mathbf{A}(\bar{\mathbf{p}})$ są ujemne, natomiast minory główne macierzy $-\mathbf{A}(\bar{\mathbf{p}})$ są naprzemian dodatnie i ujemne. Tak więc funkcja $-\beta(p_1, \ldots, p_n)$ ma w punkcie $\bar{\mathbf{p}}$ lokalne maksimum, czyli punkt $\bar{\mathbf{p}}$ jest punktem lokalnego minimum funkcji $\beta(p_1, \ldots, p_n)$:

(b)
$$\inf_{U(p)} \beta(p_1, \ldots, p_n) = \beta(\bar{\mathbf{p}}).$$

Dla rozwiązania $\bar{\mathbf{p}}_1$ otrzymujemy

$$a_{ij}(\bar{\mathbf{p}}_1) = \begin{cases} 0, & \text{dla } i = j \text{ lub } i = 1 \text{ lub } j = 1, \\ c_1, & \text{w pozostałych przypadkach,} \end{cases}$$

gdzie

$$c_1 = \frac{(n-3)!}{(k-3)!(n-k-2)!} q^{k-3}(1-q)^{n-k-2} \times$$
$$\left(\frac{p_1(1-q)^2}{(n-k)(n-k-1)} + \frac{(1-2p_1)q(1-q)}{(k-2)(n-k-1)} - \frac{(1-p_1)q^2}{(k-1)(k-2)}\right),$$

$$p_1 = np - (k-1),\ q = (k-1)/(n-1).$$

Przypadek $(k-1)/n < p < k/n$.

Niech $\mathbf{h}$ będzie wektorem o początku w punkcie $\bar{\mathbf{p}}_1$ i końcu w punkcie $\bar{\mathbf{p}}$, to znaczy $\mathbf{h}' = ((k-1)-(n-1)p, p-(k-1)/(n-1), \ldots, p-(k-1)/(n-1))$. Zbadamy znak wyrażenia $\mathbf{h}'\mathbf{A}(\bar{\mathbf{p}}_1)\mathbf{h}$. Dla $(k-1)/n < p < (k-1)/(n-1)$ liczba c_1 jest ujemna. Liczba c_1 jest dodatnia dla $(k-1)/(n-1) < p < k/n$. Ponieważ $\mathbf{h}'\mathbf{A}(\bar{\mathbf{p}}_1)\mathbf{h} = c_1(n-1)(n-2)(p-(k-1)/(n-1))^2$, więc dla $(k-1)/n < p < (k-1)/(n-1)$ mamy $\mathbf{h}'\mathbf{A}(\bar{\mathbf{p}}_1)\mathbf{h} < 0$, czyli funkcja $\beta(p_1, \ldots, p_n)$ maleje w kierunku wektora $\mathbf{h}$. Dla $(k-1)/n < p < k/n$ mamy $\mathbf{h}'\mathbf{A}(\bar{\mathbf{p}}_1)\mathbf{h} > 0$, czyli funkcja $\beta(p_1, \ldots, p_n)$ rośnie w kierunku wektora $\mathbf{h}$. Funkcja zachowuje się przeciwnie w kierunku wektora ortogonalnego do wektora $\mathbf{h}$.

Niech $p < (k-1)/(n-1)$. Punkty $\bar{\mathbf{p}}$, $\bar{\mathbf{p}}_1$ oraz $\bar{\mathbf{p}}^{\varepsilon-}$, gdzie $\bar{\mathbf{p}}^{\varepsilon-}$ jest punktem na ścianie $p_1 = p - \varepsilon$ najbliższym punktowi $\bar{\mathbf{p}}$ (tzn. $\bar{\mathbf{p}}^{\varepsilon-} = (p-\varepsilon, p+\varepsilon/(n+1), \ldots, p+\varepsilon/(n+1)))$ są współliniowe. Otrzymujemy (symbolami $a \vee b$ oraz $a \wedge b$ oznaczamy odpowiednio $\max(a, b)$ oraz $\min(a, b)$):

$$(c)\quad \sup \beta(p_1, \ldots, p_n) = \begin{cases} \beta(\bar{\mathbf{p}}), & \text{gdy } p \leq (k-1-\varepsilon)/(n-1) \\ & \text{(tzn. } \bar{\mathbf{p}}^{\varepsilon-} \text{ znajduje się między } \bar{\mathbf{p}} \text{ oraz } \bar{\mathbf{p}}_1); \\ \beta(\bar{\mathbf{p}}) \vee \beta(\bar{\mathbf{p}}^{\varepsilon-}), & \text{gdy } p > (k-1-\varepsilon)/(n-1) \\ & \text{(tzn. } \bar{\mathbf{p}}_1 \text{ znajduje się między } \bar{\mathbf{p}} \text{ oraz } \bar{\mathbf{p}}^{\varepsilon-}). \end{cases}$$

Jeżeli $p > (k-1)/(n-1)$, to punkt $\bar{\mathbf{p}}^{\varepsilon+}$ wybieramy na ścianie $p_1 = p + \varepsilon$ i przeprowadzając podobną analizę otrzymujemy:

$$(d)\qquad \inf \beta(p_1, \ldots, p_n) = \begin{cases} \beta(\bar{\mathbf{p}}), & \text{gdy } p \geq (k-1+\varepsilon)/(n-1); \\ \beta(\bar{\mathbf{p}}) \wedge \beta(\bar{\mathbf{p}}^{\varepsilon+}), & \text{gdy } p < (k-1+\varepsilon)/(n-1). \end{cases}$$

Przypadek $p < (k-1)/n$ lub $p > k/n$.

W tym przypadku funkcja $\beta(p_1, \ldots, p_n)$ w punkcie $\bar{\mathbf{p}}$ osiąga ekstremum lokalne: maksimum, gdy $p < (k-1)/n$ oraz minimum, gdy $p > k/n$. Wartość najmniejszą (odpowiednio, największą) funkcja $\beta(p_1, \ldots, p_n)$ osiąga na wierzchołku kostki $\{|p_i - p| \leq \varepsilon,\ i = 1, \ldots, n,\ \sum p_i = np\}$ (oznaczmy wierzchołek przez $\tilde{\mathbf{p}} = (\tilde{p}_1, \ldots, \tilde{p}_n)$.) Zauważmy, że gdy n jest parzyste, to połowa współrzędnych $\tilde{p}_i$ ma postać $(p-\varepsilon) \vee 0$, a pozostałe są równe $(p+\varepsilon) \wedge 1$. Gdy n jest nieparzyste, to jedna ze współrzędnych $\tilde{p}_i$ jest równa p, połowa pozostałych jest równa $(p-\varepsilon) \vee 0$, a reszta jest równa $(p+\varepsilon) \wedge 1$. Analizując zachowanie funkcji $\beta(p_1, \ldots, p_n)$ na wierzchołkach $\tilde{\mathbf{p}}$ otrzymujemy:

$$(e)\qquad \inf \beta(p_1, \ldots, p_n) = \begin{cases} \beta(\tilde{\mathbf{p}}), & \text{gdy } p \leq (k-1)/n; \\ \beta(\tilde{\mathbf{p}}) \wedge \beta(\bar{\mathbf{p}}^{\varepsilon+}), & \text{gdy } (k-1)/n < p < (k-1)/(n-1); \\ \beta(\bar{\mathbf{p}}^{\varepsilon+}), & \text{gdy } p = (k-1)/(n-1); \end{cases}$$

$$(f)\qquad \sup \beta(p_1, \ldots, p_n) = \begin{cases} \beta(\bar{\mathbf{p}}^{\varepsilon-}), & \text{gdy } p = (k-1)/(n-1); \\ \beta(\tilde{\mathbf{p}}) \vee \beta(\bar{\mathbf{p}}^{\varepsilon-}), & \text{gdy } (k-1)/(n-1) < p < k/n; \\ \beta(\tilde{\mathbf{p}}), & \text{gdy } p \geq k/n; \end{cases}$$

Na podstawie (a) — (f) stwierdzamy, że funkcja odporności mocy testu ma postać:

$$r(p) = \begin{cases} \beta(\bar{\mathbf{p}}) - \beta(\tilde{\mathbf{p}}), & \text{gdy } p \leq (k-1)/n; \\ \beta(\bar{\mathbf{p}}) - \beta(\tilde{\mathbf{p}}) \wedge \beta(\bar{\mathbf{p}}^{\varepsilon+}), & \text{gdy } (k-1)/n < p \leq (k-1-\varepsilon)/(n-1); \\ \beta(\bar{\mathbf{p}}) \vee \beta(\bar{\mathbf{p}}^{\varepsilon-}) - \beta(\tilde{\mathbf{p}}) \wedge \beta(\bar{\mathbf{p}}^{\varepsilon+}), & \text{gdy } (k-1-\varepsilon)/(n-1) < p < (k-1)/(n-1); \\ \beta(\bar{\mathbf{p}}^{\varepsilon-}) - \beta(\bar{\mathbf{p}}^{\varepsilon+}), & \text{gdy } p = (k-1)/(n-1); \\ \beta(\tilde{\mathbf{p}}) \vee \beta(\bar{\mathbf{p}}^{\varepsilon-}) - \beta(\bar{\mathbf{p}}) \wedge \beta(\bar{\mathbf{p}}^{\varepsilon+}), & \text{gdy } (k-1)/(n-1) < p \leq (k-1+\varepsilon)/(n-1); \\ \beta(\tilde{\mathbf{p}}) \vee \beta(\bar{\mathbf{p}}^{\varepsilon-}) - \beta(\bar{\mathbf{p}}), & \text{gdy } (k-1+\varepsilon)/(n-1) < p < k/n; \\ \beta(\tilde{\mathbf{p}}) - \beta(\bar{\mathbf{p}}), & \text{gdy } p \geq k/n. \end{cases}$$

Przy pewnych wartościach $\varepsilon > 0$ niektóre z warunków okazują się puste (np. jeżeli $(k-1)/n < \varepsilon < (n-k)/n$, to $((k-1)/n, (k-1-\varepsilon)/(n-1)] = \emptyset$). Wówczas funkcja $r(p)$ składa się z odpowiednio mniejszej liczby segmentów.

4. ASPEKT INFINITEZYMALNY

Interesującym jest oszacowanie wielkości odchyleń mocy testu w przypadku nierównych prawdopodobieństw od mocy testu w schemacie Bernoulliego. Mówi o tym następujący fakt.

Fakt. *Dla* $(p_1, \ldots, p_n) \in U(p)$ *zachodzi*

$$|\beta(p_1, \ldots, p_n) - \beta(p)| \leq C\varepsilon^2,$$

gdzie C *jest pewną stałą.*

Dowód. Rozwijając funkcję $\beta(p_1, \ldots, p_n)$ w szereg Taylora do drugiego wyrazu wokół punktu $\bar{\mathbf{p}}$ otrzymujemy

$$\beta(p_1, \ldots, p_n) = \beta(p) + \binom{n-1}{k-1} p^{k-1}(1-p)^{n-k}\left(\sum p_i - np\right) + \frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{\partial^2}{\partial p_i \partial p_j}\beta(p_1^0, \ldots, p_n^0)(p_i^0 - p)(p_j^0 - p),$$

gdzie $(p_1^0, \ldots, p_n^0) \in U(p)$. Ponieważ $(p_1, \ldots, p_n) \in U(p)$, więc $\sum p_i - np = 0$. Druga pochodna funkcji $\beta(p_1, \ldots, p_n)$

$$\frac{\partial^2}{\partial p_i \partial p_j}\beta(p_1, \ldots, p_n) = \begin{cases} 0, & \text{dla } i = j, \\ \displaystyle\sum_{x_{(i,j)}=k-2}\prod_{m\neq i,j} w(p_m) - \sum_{x_{(i,j)}=k-1}\prod_{m\neq i,j} w(p_m), & \text{dla } i \neq j \end{cases}$$

jest jednostajnie ograniczona na zbiorze $U(p)$ przez pewną stałą M:

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial p_i \partial p_j}\beta(p_1, \ldots, p_n)\right| \leq M, \quad (\forall i, j).$$

Zatem mamy

$$|\beta(p_1, \ldots p_n) - \beta(p)| = \frac{1}{2}\left|\sum_{i,j}\frac{\partial^2}{\partial p_i \partial p_j}\beta(p_1^0, \ldots, p_n^0)(p_i^0 - p)(p_j^0 - p)\right| \leq \frac{n(n-1)}{2}M\varepsilon^2.$$

Przyjmując $C = n(n-1)M/2$ otrzymujemy tezę.

Z udowodnionego faktu wynika, że małe odstępstwa od schematu Bernoulliego nie wpływają istotnie na moc testu. W tym sensie rozważany test jest infinitezymalnie odporny na opisane zaburzenie modelu.

5. TEST ZRANDOMIZOWANY

Rozważmy test zrandomizowany dla $H\colon p \le p_0$ wobec $K\colon p > p_0$:

$$\varphi(X_1, \ldots, X_n) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } X > k, \\ \gamma, & \text{gdy } X = k, \\ 0, & \text{gdy } X < k, \end{cases}$$

gdzie $\gamma \in [0,1]$. Funkcja mocy tego testu wyraża się wzorem

$$\beta(p_1, \ldots, p_n) = \sum_{X>k} \prod_{j=1}^{n} w(p_j) + \gamma \sum_{X=k} \prod_{j=1}^{n} w(p_j).$$

Postępując tak jak dla testu niezrandomizowanego otrzymujemy następującą funkcję odporności mocy testu:

$$r(p) = \begin{cases} \beta(\bar{\mathbf{p}}) - \beta(\tilde{\mathbf{p}}), & \text{gdy } p \le \frac{n-1}{n} q; \\ \beta(\bar{\mathbf{p}}) - \beta(\tilde{\mathbf{p}}) \wedge \beta(\bar{\mathbf{p}}^{\varepsilon+}), & \text{gdy } \frac{n-1}{n} q < p \le q - \frac{\varepsilon}{n-1}; \\ \beta(\bar{\mathbf{p}}) \vee \beta(\bar{\mathbf{p}}^{\varepsilon-}) - \beta(\tilde{\mathbf{p}}) \wedge \beta(\bar{\mathbf{p}}^{\varepsilon+}), & \text{gdy } q - \frac{\varepsilon}{n-1} < p < q; \\ \beta(\bar{\mathbf{p}}^{\varepsilon-}) - \beta(\bar{\mathbf{p}}^{\varepsilon+}), & \text{gdy } p = q; \\ \beta(\tilde{\mathbf{p}}) \vee \beta(\bar{\mathbf{p}}^{\varepsilon-}) - \beta(\bar{\mathbf{p}}) \wedge \beta(\bar{\mathbf{p}}^{\varepsilon+}), & \text{gdy } q < p \le q + \frac{\varepsilon}{n-1}; \\ \beta(\tilde{\mathbf{p}}) \vee \beta(\bar{\mathbf{p}}^{\varepsilon-}) - \beta(\bar{\mathbf{p}}), & \text{gdy } q + \frac{\varepsilon}{n-1} < p < \frac{n-1}{n} q + \frac{1}{n}; \\ \beta(\tilde{\mathbf{p}}) - \beta(\bar{\mathbf{p}}), & \text{gdy } p \ge \frac{n-1}{n} q + \frac{1}{n}, \end{cases}$$

gdzie

$$q = \frac{1}{2\left[\binom{n}{k}\gamma - \binom{n-1}{k}\right]} \left[2\binom{n-1}{k-1}\gamma - \binom{n-2}{k-1} + \frac{2}{k-1}\binom{n-2}{k-2} \sqrt{\frac{1}{k}\left[(n-1)(2nk-n-k)\gamma^2 - (n-1)(n-k)\gamma + \frac{k}{4}(n-k)^2\right]} \right].$$

Pozostałe oznaczenia takie jak poprzednio.

6. PRZYKŁAD

Niech $n = 3$. Weryfikujemy hipotezę $H: p \le 0.2$ wobec $K: p > 0.2$ na poziomie istotności 0.05. Rozważymy test niezrandomizowany i test zrandomizowany.

$$\varphi_1(X_1, X_2, X_3) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } X \ge 2, \\ 0, & \text{gdy } X < 2; \end{cases}$$

$$\varphi_2(X_1, X_2, X_3) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } X > 2, \\ 0.438, & \text{gdy } X = 2, \\ 0, & \text{gdy } X < 2. \end{cases}$$

przyjmujemy $\varepsilon = 0.01$. Funkcje mocy oraz odporności są stablicowane poniżej dla wybranych wartości p.

p	Test niezrandomizowany		Test zrandomizowany	
	$\beta(p)$	$r(p) \times 10^5$	$\beta(p)$	$r(p) \times 10^5$
0.1	0.028	8	0.013	9.7
0.2	0.104	6	0.050	9.4
0.3	0.216	4	0.110	9.1
0.4	0.352	2	0.190	8.7
0.5	0.500	0.1	0.289	8.4
0.6	0.648	2	0.406	8.1
0.7	0.784	4	0.536	7.8
0.8	0.896	6	0.680	7.5
0.9	0.972	8	0.835	7.2

7. WNIOSKI

Można uznać, że moc testu dla prawdopodobieństwa sukcesu w schemacie Bernoulliego jest odporna na niewielkie zaburzenia modelu polegające na tym, że prawdopodobieństwo sukcesu niewiele zmienia się od próby do próby, ale średnio jest ono równe modelowemu prawdopodobieństwu.

LITERATURA

Elandt R. (1964), *Statystyka matematyczna w zastosowaniach do doświadczalnictwa rolniczego*, PWN, Warszawa.

Rao C.R., (1982), *Liniowe modele statystyki matematycznej*, PWN, Warszawa.

Zieliński R. (1978), O mierzeniu odporności statystyk, *Mat. Stos.*, **XII**, 71 – 76.

Praca wpłynęła 15 grudnia 1990;
w wersji ostatecznej 20 maja 1991

ON ROBUSTNESS OF THE POWER OF A TEST FOR THE PROBABILITY IN A BINOMIAL MODEL

Summary

In many practical problems the Bernoulli statistical model with an unkown p is applied. But uncontrolled factors cause that the probability p may change from one experiment to another. The changing of the power function of the standard test for $H: p \leq p_0$ is discussed.

Key words: robustness, Bernoulli trials